Оптимално интерполиране на изпъкнали данни в R^3 с изпъкнали гладки повърхнини

ст.н.с.II гост. доц. д-р Георги Илиев

Институт по Математика и Информатика - БАН
Нов Български Университет - Департамент по Телекомуникации

Тази работа е поддържана от МОН чрез Договор № VU -1 - 303/07

1 Въведение.

1.1 Едномерен случай.

Ще разгледаме един едномерен прост пример:
Нека върху реалната права са дадени три различни точки $x_2 < x_0 < x_1$ и нека зададем три стойности в тези точки - $z_2, z_0, z_1 \in \mathbf{R}$, такива че числото $\dfrac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0} - \dfrac{z_0 - z_2}{x_0 - x_2} > 0$. Може да кажем, че имаме тройка строго изпъкнали данни в $\mathbf{R}^2$.

Добре известен е "екстремалния проблем за минимизиране на енергията,"при който искаме да намерим такава два пъти диференцируема функция - интерполираща тройката данни, с минимална $\mathbf{L}_2-$ норма на втората си производна в интервала $[x_2, x_1]$. Знаем, че единственото решение на този проблем е естествената кубична сплайн функция, или единствената интерполираща два пъти диференцируема функция, такава че втората и производна е непрекъсната, линейна върху интервалите $[x_2, x_0]; [x_0, x_1]$, приемаща стойности 0 в двете крайни точки x_2, x_1 и положително число в централната точка x_0. Този резултат може да се докаже като се използват само два класически резултата - неравенството на Коши-Шварц и формулата за интегриране по части. Нека да отбележим един интересен факт относно решението на горепоставения ектремален проблем: решението е изпъкнала функция (както данните), въпреки че ние не изискваме това отнапред. Този интересен факт не е в сила (в общия случай), когато имаме строго изпъкнали данни върху повече от три точки върху реалната права.

Една от целите на работата, която представяме, е (доколкото е възможно) да поставим и решим едно обобщение в $\mathbf{R}^3$ на тези добре известни резултати в $\mathbf{R}^2$.

1.2 Двумерен случай.

Ще разгледаме още един пример:

Нека в $\mathbf{R}^2$ имаме седемте точки:

$$V_0 = (0,0), V_1 = (1,0) = -V_4, V_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -V_5,$$

$$V_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -V_6.$$

За да получим данни в $\mathbf{R}^3$, в тези точки задаваме стойности:

$$z_0 = -10, z_i = 0; i = 1, ..., 6.$$

Може да предполагаме, че $\{z_i\}_{i=0}^6$ са измерени стойности в точките $\{V_i\}_{i=0}^6 \in \mathbf{R}^2$, които са върхове на триангулацията образувана от 6-те триъгълника:

$$(V_0, V_i, V_{i+1}) \;\; i = 1, ..., 5 \text{ и триъгълника } (V_0, V_6, V_1).$$

Този пример е разглеждан в [3], където е доказано следното:

1) Интерполационната гладка мрежа от криви:

$$\{f_i(t) = -8t^3 + 18t^2 - 10;\; g_i(t) = 6t^2 - 6t\}_{i=1}^6;\; 0 \le t \le 1;$$

$$f_i(t) \text{ е върху отсечката } [V_0, V_i],\; i = 1...6;$$

$$g_i(t) \text{ върху } [V_i, V_{i+1}], i = 1...5;$$

$$g_6(t) \text{ върху } [V_6, V_1],$$

е такава, че осъществява минимална $\mathbf{L}_2$ норма на втората си производна измежду всички интерполационни гладки мрежи от криви. Тук под $\mathbf{L}_2$ норма на втората производна разбираме числото:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^6 \int_0^1 (f_i''(t))^2\, dt + \sum_{i=1}^6 \int_0^1 (g_i''(t))^2\, dt}.$$

2). Ако означим:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{5(6\sqrt{3}+11)(\sqrt{3}-1-t)^3}{13} - \dfrac{30(\sqrt{3}+4)(1-t)}{13} \text{ при } 0 \le t \le \sqrt{3}-1, \\ \\ \dfrac{-30(\sqrt{3}+4)(1-t)}{13} \text{ при } \sqrt{3}-1 \le t \le 1; \end{cases}$$

$$\psi(t) = -\frac{15(\sqrt{3}+4)t(1-t)}{13},$$

то интерполационната, гладка, изпъкнала върху ребрата на триангулацията мрежа от криви:

$$\{\overline{f}_i(t) = \varphi(t);\; \overline{g}_i(t) = \psi(t)\}_{i=1}^6;\; 0 \le t \le 1;$$

$$\overline{f}_i(t) \text{ е върху отсечката } [V_0, V_i],\; i = 1...6;$$

$$\overline{g}_i(t) \text{ върху } [V_i, V_{i+1}], i = 1...5;$$

$$\overline{g}_6(t) \text{ върху } [V_6, V_1],$$

е такава, че осъществява минимална $\mathbf{L}_2$ норма на втората си производна измежду всички интерполационни, гладки, изпъкнали върху ребрата на триангулацията мрежи от криви.

Следвайки идеите на G.M.Nielson от [1], лесно може да продължим (блендираме) върху областта на триангулацията горните мрежи от криви (които са в същност едномерни обекти) в гладка интерполационна функция на две променливи, като за втората функция ще имаме изпъкналост върху областта на триангулацията (и изобщо в $\mathbf{R}^2$). Това се получава с ротация (около правата минаваща през точката V_0 и перпендикулярна на равнината XoY) на кривата f_i в първия случай и на кривата $\overline{f}_i$ във втория. Тази леснина, обаче, е твърде измамна и свързана със симетричността на данните. Ако изместим "малко" (така че да запазим изпъкналостта на данните) само една от стойностите на данните - например $V_1 = (1-\epsilon, \sqrt{1-(1-\epsilon)^2}); \epsilon > 0$, то всичко в случаите 1) и 2) се измества с "малко" и тогава блендирането не може да се получи чрез ротация. За да блендираме гладката мрежа от криви в първия случай в гладка повърхнина, трябва да си послужим с някой от известните методи - например с метода предложен от G.M.Nielson в [1]. Вторият случай (когато искаме да блендираме с гладка **изпъкнала повърхнина** решението на изпъкналата екстремална задача) е още по-неприятен. Оказва се че при достатъчно малко, положително ϵ, (такова че да запазим строгата изпъкналост на данните) не съществува нито една гладка, изпъкнала в областта на триангулацията повърхнина, която да съвпада с едномерните функции $\overline{f}_i$ върху съответните ребра.

По тази причина, ние в [3] казваме, че "оптималната-всмисъл на 2) ", изпъкнала върху ребрата, гладка , интерполационна мрежа от криви не винаги е "глобално изпъкнала", т.е. може да се блендира в изпъкнала, гладка повърхнина.

В тази работа е решена задачата за получаването на "оптимална-в смисъл на дефинициите по-долу", гладка, интерполационна мрежа от криви, върху "звезда-триангулация,"която може да се блендира в изпъкнала, гладка повърхнина.

2 Мрежи от криви върху звезда-триангулация.

2.1 Дефиниция на звезда и звезда-триангулация.

Нека $n \geq 3$ е цяло число и $V_i = (x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2, i = 0, 1, ..., n$ са **различни** точки в $\mathbf{R}^2$. Означаваме с $\mathbf{c}_i$ интервала $[V_0, V_i], i = 1, ..., n$; и предполагаме, че точките $\{V_i \in \mathbf{R}^2\}_{i=0}^n$ са такива, че

$$\mathbf{c}_i \cap \mathbf{c}_j = V_0; i, j = 0, 1, ..., n; i \neq j.$$

Разглеждаме множеството $\mathbf{c}$, което се състои от всички интервали $\mathbf{c}_i$:

$$\mathbf{c} := \bigcup_{i=1}^{n} c_i.$$

Ориентираният ъгъл между $\mathbf{c}_j$ и $\mathbf{c}_k$ означаваме $\prec(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_k)$. (Използваме посока обратна на часовниковата стрелка.)
Предполагаме още, че точките $\{V_i\}_{i=0}^n$ са такива, че:

$$0 <\prec(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{k+1}) = \inf_{m=1,...,n\ ;\ m\neq k} \prec(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}_m) < \pi \text{ за } k = 1, 2, ..., n-1; 0 <\prec(\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_1) < \pi.$$

Дефиниция 1 *Наричаме множеството* $\mathbf{c}$ *звезда с начало* V_0 *. Отсечката* $\mathbf{c}_i$ *в една звезда наричаме централно насочено ребро.*

Всяка звезда поражда и една триангулация, която се състои от n на брой триъгълници:

$$\lhd_1 := (V_0, V_1, V_2), \lhd_2 := (V_0, V_2, V_3), ..., \lhd_{n-1} := (V_0, V_{n-1}, V_n), \lhd_n := (V_0, V_n, V_1).$$

Когато работим с произволен триъгълник с върхове $V_1(x_1, y_1), V_2(x_2, y_2), V_3(x_3, y_3)$ е удобно за всяко $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ да въведем барицентричните координати B_1, B_2, B_3 дефинирани чрез решаването на уравненията:

$$\left.\begin{array}{l} B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 = x \\ B_1y_1 + B_2y_2 + B_3y_3 = y \\ B_1 + B_2 + B_3 = 1. \end{array}\right\}$$

Нека означим с $\overline{\lhd}_j$ множеството от всички точки в $\mathbf{R}^2$ с неотрицателни барицентрични координати относно върховете на $\lhd_j$.

Дефиниция 2 *Множеството* $T(\mathbf{c}) := \bigcup_{s=1}^n \overline{\lhd}_s \in \mathbf{R}^2$ *наричаме звезда-триангулация ако затвореният полигон* $(V_1, V_2, ..., V_n, V_1)$ *е строго изпъкнал. Отсечките* $\mathbf{b}_s := [V_s, V_{s+1}]; s = 1, ..., n-1$ *и* $\mathbf{b}_n := [V_n, V_1]$ *в една звезда-триангулация наричаме гранични ребра.*

Ако $T(\mathbf{c})$ е звезда-триангулация, нека дефинираме множествата $\mathbf{b} := \bigcup_{j=1}^n \mathbf{b}_j,\quad T := \mathbf{c}+\mathbf{b}$. Да отбележим, че "тънкото"множество T не е границата на "дебелото"множество $T(\mathbf{c})$.

2.2 Дефиниция на локални данни и строго изпъкнали локални данни върху звезда-триангулация.

Дефиниция 3 *Нека* $z_j \in \mathbf{R}, j = 0, 1, ..., n$. *Множеството* $\{T(\mathbf{c}); \{V_j(x_j, y_j), z_j\}_{j=0}^n\}$ *наричаме локални данни върху звезда-триангулация и го бележим с*

$$\mathbf{Data} := \{T(\mathbf{c}); \{V_j(x_j, y_j), z_j\}_{j=0}^n\}.$$

Нека $\mathbf{Data} = \{T(\mathbf{c}); \{V_j(x_j, y_j), z_j\}_{j=0}^n\}$ са локални данни. Да разгледаме функцията $L : T(\mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{R}$ със свойствата, че L е непрекъсната, линейна върху триъгълниците на $T(\mathbf{c})$ и $L(V_j) = z_j$ при $j = 0, 1, ..., n$; т.е. L е чатично-линейната интерполанта на данните.

Дефиниция 4 *Казваме, че локалните данни* $\mathbf{Data} = \{T(\mathbf{c}); \{V_j(x_j, y_j), z_j\}_{j=0}^n\}$ *са строго изпъкнали локални данни ако* L *е изпъкнала в* $T(\mathbf{c})$ *и градиента на* L *има прекъснатост от първи род напречно на всяко централно насочено ребро. За краткост ще казваме, че* **Data** *са* **СИЛД** *в този случай.*

2.3 Мрежи от криви върху звезда-триангулация. Класът $C(\mathbf{Data})$ от мрежи от криви.

Нека F е функция на две променливи, дефинирана върху звезда-триангулацията $T(\mathbf{c})$, т.е. $F : T(\mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{R}$. Рестрикцията на тази функция върху множеството T може да бъде описана параметрично (не по единствен начин) посредством две фамилии от едномерни функции, като първата описва F по централно насочените ребра на $T(\mathbf{c}) - \mathbf{c}_i$, а втората фамилия по граничните ребра на $T(\mathbf{c}) - \mathbf{b}_i$. Нека наречем първата фамилия $\widehat{F}_{(\mathbf{c})}$, а втората $\widehat{F}_{(\mathbf{b})}$. Едно от възможните параметрични описания може да е следното:

Дефиниция на $\widehat{F}_{(\mathbf{c})}$:

$$f_s(t) = F((1 - \frac{t}{||\mathbf{c}_s||})V_0 + \frac{tV_s}{||\mathbf{c}_s||}) = F(\varphi_s(t), \psi_s(t)) \ ,$$

където

$$\varphi_s(t) = (1 - \frac{t}{||\mathbf{c}_s||})x_0 + \frac{tx_s}{||\mathbf{c}_s||} \ , \ \psi_s(t) = (1 - \frac{t}{||\mathbf{c}_s||})y_0 + \frac{ty_s}{||\mathbf{c}_s||} \ ,$$

$$0 \le t \le ||\mathbf{c}_s||, ||\mathbf{c}_s|| := \sqrt{(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2} \ , \ s = 1, 2, ..., n.$$

$$\widehat{F}_{(\mathbf{c})} := \{f_s(t)\}_{s=1}^n$$

Дефиниция на $\widehat{F}_{(\mathbf{b})}$:

$$g_s(t) = F((1 - \frac{t}{||\mathbf{b}_s||})V_s + \frac{tV_{s+1}}{||\mathbf{b}_s||}), s = 1, 2, ..., n-1;$$

$$g_n(t) = F((1 - \frac{t}{||\mathbf{b}_n||})V_n + \frac{tV_1}{||\mathbf{b}_n||}).$$

$$\widehat{F}_{(\mathbf{b})} := \{g_s(t)\}_{s=1}^n$$

Дефиниция 5 *Двойката фамилии от едномерни функции*

$$\widehat{F} = \widehat{F}_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}_{(\mathbf{b})} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\}$$

ще наричаме **мрежа от криви върху звезда-триангулацията** $T(\mathbf{c})$.

От горната дефиниция се вижда, че всяка мрежа от криви върху звезда-триангулацията $T(\mathbf{c})$ е дефинирана върху множеството $T = \mathbf{c} + \mathbf{b} \subset T(\mathbf{c})$.

Нека въведем някои класове от мрежи от криви върху звезда-триангулацията $T(\mathbf{c})$:

Казваме,че

$$\widehat{F} = \widehat{F}_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}_{(\mathbf{b})} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\}$$

е от класа $W[T]$ ако:

$f_s^{''}(t)$ съществува п.н. и е ограничена в $[0, ||\mathbf{c}_s||], s = 1, 2, ..., n;$

$g_s^{''}(t)$ съществува п.н. и е ограничена в $[0, ||\mathbf{b}_s||], s = 1, 2, ..., n.$

Нека $\{T(\mathbf{c}), \{V_i, z_i\}_{i=0}^n\}$ са локални данни върху звезда-триангулацията $T(\mathbf{c})$.

Дефиниция 6 (на основен клас от мрежи от криви - $C(\mathbf{Data})$).

$C(\mathbf{Data})$ *се състои от тези мрежи от криви*

$$\widehat{F} = \widehat{F}_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}_{(\mathbf{b})} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\},$$

за които :

(i) $\widehat{F} \in W[T]$;

(ii) $f_i(0) = z_0, f_i(||\mathbf{c}_i||) = z_i$ *при* $i = 1, 2, ..., n$;

(iii) $g_s(0) = z_s, g_s(||\mathbf{b}_s||) = z_{s+1}$ *при* $s = 1, 2, ..., n-1$ *и* $g_n(0) = z_n, g_n(||\mathbf{b}_n||) = z_1$;

(iv) *ако разгледаме множеството от функции* $\{f_s(t)\}_{s=1}^n$ *като криви в* $\mathbf{R}^3$, *то в точката* $V_0 \in \mathbf{R}^2$, *тези криви имат обща допирателна равнина;*

(v) *ако разгледаме множеството от функции* $\{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\}$ *като криви в* $\mathbf{R}^3$, *то във всяка точка* $V_i, i = 1, 2, ..., n$ *от* $\mathbf{R}^2$ *, тези криви имат обща допирателна равнина.*

2.4 Базисни мрежи от криви върху звезда-триангулация.

Нека $T(\mathbf{c})$ е звезда-триангулация. (Тук и по-долу ще спазваме всички означения и дефиниции направени до сега.)

Първо ще дефинираме $n-2$ на брой частично линейни мрежи от криви с носител върху $\{\mathbf{c}_s, \mathbf{c}_{s+1}, \mathbf{c}_{s+2}\}, s = 1, 2, ..., n-2$.

За всяко $s = 1, 2, ..., n-2$ да разгледаме следната линейна система на неизвестните $\lambda_1^{(s)}$, $\lambda_2^{(s)}$, $\lambda_3^{(s)}$:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(s)} \dfrac{x_s - x_0}{||\mathbf{c}_s||} + \lambda_2^{(s)} \dfrac{x_{s+1} - x_0}{||\mathbf{c}_{s+1}||} + \lambda_3^{(s)} \dfrac{x_{s+2} - x_0}{||\mathbf{c}_{s+2}||} = 0 \\ \\ \lambda_1^{(s)} \dfrac{y_s - y_0}{||\mathbf{c}_s||} + \lambda_2^{(s)} \dfrac{y_{s+1} - y_0}{||\mathbf{c}_{s+1}||} + \lambda_3^{(s)} \dfrac{y_{s+2} - y_0}{||\mathbf{c}_{s+2}||} = 0 \\ \\ \lambda_1^{(s)} + \lambda_2^{(s)} + \lambda_3^{(s)} = 1 \end{cases} \tag{1}$$

От свойствата на $T(\mathbf{c})$, лесно се вижда, че детерминантата на (1) никога не е 0. Тогава (1) винаги има единствено решение.

По този начин намираме $n-2$ на брой тройки числа $\{\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \lambda_3^{(s)}\}_{s=1}^{n-2}$. За всяка от тези тройки ще конструираме мрежи от криви $\{\widehat{B}_s\}_{s=1}^{n-2}$ върху $T \subset T(\mathbf{c})$ такива, че всяка $\widehat{B}_s$ има носител само върху трите съседни централно насочени ребра $\mathbf{c}_s, \mathbf{c}_{s+1}, \mathbf{c}_{s+2}$.

Дефинираме:

$$\widehat{B}_s := \begin{cases} \lambda_1^{(s)}(1 - \dfrac{t}{||\mathbf{c}_s||}), \quad 0 \le t \le ||\mathbf{c}_s|| \quad \text{т.е. върху} \quad \mathbf{c}_s; \\ \\ \lambda_2^{(s)}(1 - \dfrac{t}{||\mathbf{c}_{s+1}||}), \quad 0 \le t \le ||\mathbf{c}_{s+1}|| \quad \text{т.е. върху} \quad \mathbf{c}_{s+1}; \\ \\ \lambda_3^{(s)}(1 - \dfrac{t}{||\mathbf{c}_{s+2}||}), \quad 0 \le t \le ||\mathbf{c}_{s+2}|| \quad \text{т.е. върху} \quad \mathbf{c}_{s+2}; \\ \\ 0 \quad \text{в противен случай} \end{cases}$$

$$s = 1, ..., n-2.$$

Наричаме $\widehat{B}_s, s = 1, ..., n-2$, **ценрално ориентирани басисни мрежи**.

По-късно ще използваме $\widehat{B}_s$ за осигуряване на условието за гладкост в точката V_0 , т.е. (iv) в дефиницията на класа $C(\mathbf{Data})$.

За да можем да осигурим условието за гладкост в точките $V_s, s = 1, 2, ..., n$ в дефиницията на класа $C(\mathbf{Data})$, се налага да дефинираме още n частично линейни мрежи от криви.

За всяко $s = 1, 2, ..., n-2$ да разгледаме следната линейна система на неизвестните $\mu_1^{(s+1)}$, $\mu_2^{(s+1)}$, $\mu_3^{(s+1)}$:

$$\begin{cases} \mu_1^{(s+1)} \dfrac{x_{s+2} - x_{s+1}}{||\mathbf{b}_{s+1}||} + \mu_2^{(s+1)} \dfrac{x_0 - x_{s+1}}{||\mathbf{c}_{s+1}||} + \mu_3^{(s+1)} \dfrac{x_s - x_{s+1}}{||\mathbf{b}_s||} = 0 \\ \\ \mu_1^{(s+1)} \dfrac{y_{s+2} - y_{s+1}}{||\mathbf{b}_{s+1}||} + \mu_2^{(s+1)} \dfrac{y_0 - y_{s+1}}{||\mathbf{c}_{s+1}||} + \mu_3^{(s+1)} \dfrac{y_s - y_{s+1}}{||\mathbf{b}_s||} = 0 \\ \\ \mu_1^{(s+1)} + \mu_2^{(s+1)} + \mu_3^{(s+1)} = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Нека разгледаме още и следните две линейни системи:

$$\begin{cases} \mu_1^{(n)} \dfrac{x_1 - x_n}{||\mathbf{b}_n||} + \mu_2^{(n)} \dfrac{x_0 - x_n}{||\mathbf{c}_n||} + \mu_3^{(n)} \dfrac{x_{n-1} - x_n}{||\mathbf{b}_{n-1}||} = 0 \\ \\ \mu_1^{(n)} \dfrac{y_1 - y_n}{||\mathbf{b}_n||} + \mu_2^{(n)} \dfrac{y_0 - y_n}{||\mathbf{c}_n||} + \mu_3^{(n)} \dfrac{y_{n-1} - y_n}{||\mathbf{b}_{n-1}||} = 0 \\ \\ \mu_1^{(n)} + \mu_2^{(n)} + \mu_3^{(n)} = 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \mu_1^{(1)} \dfrac{x_2 - x_1}{||\mathbf{b}_1||} + \mu_2^{(1)} \dfrac{x_0 - x_1}{||\mathbf{c}_1||} + \mu_3^{(1)} \dfrac{x_n - x_1}{||\mathbf{b}_n||} = 0 \\ \\ \mu_1^{(1)} \dfrac{y_2 - y_1}{||\mathbf{b}_1||} + \mu_2^{(1)} \dfrac{y_0 - y_1}{||\mathbf{c}_1||} + \mu_3^{(1)} \dfrac{y_n - y_1}{||\mathbf{b}_n||} = 0 \\ \\ \mu_1^{(1)} + \mu_2^{(1)} + \mu_3^{(1)} = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Детерминантите на (2) при $s = 1, ..., n-2$, както и на (3) и (4) никога не са равни на 0. Тогава (2),(3) и (4) винаги имат единствено решение.

По този начин намираме n на брой тройки числа $\{\mu_1^{(s)}, \mu_2^{(s)}, \mu_3^{(s)}\}_{s=1}^{n}$. За всяка от тези тройки ще конструираме частично линейни мрежи $\{\widehat{D}_s\}_{s=1}^{n}$ върху $T \subset T(\mathbf{c})$ такива, че всяка $\widehat{D}_s$ има носител само върху две съседни гранични ребра и едно централно насочено ребро между двата съседа.

За $s = 2, ..., n$ дефинираме:

$$\widehat{D}_s := \begin{cases} \mu_1^{(s)}(1 - \dfrac{t}{||\mathbf{b}_s||}), \quad 0 \le t \le ||\mathbf{b}_s|| \quad \text{т.е. върху} \quad \mathbf{b}_s; \\ \\ \mu_2^{(s)}(1 - \dfrac{t}{||\mathbf{c}_s||}), \quad 0 \le t \le ||\mathbf{c}_s|| \quad \text{т.е. върху} \quad \mathbf{c}_s; \\ \\ \mu_3^{(s)}(1 - \dfrac{t}{||\mathbf{b}_{s-1}||}), \quad 0 \le t \le ||\mathbf{b}_{s-1}|| \quad \text{т.е. върху} \quad \mathbf{b}_{s-1}; \\ \\ 0 \quad \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Още дефинираме:

$$\widehat{D}_1 := \begin{cases} \mu_1^{(1)}(1 - \dfrac{t}{||\mathbf{b}_1||}), \quad 0 \le t \le ||\mathbf{b}_1|| \quad \text{т.е. върху} \quad \mathbf{b}_1; \\ \\ \mu_2^{(1)}(1 - \dfrac{t}{||\mathbf{c}_1||}), \quad 0 \le t \le ||\mathbf{c}_1|| \quad \text{т.е. върху} \quad \mathbf{c}_1; \\ \\ \mu_3^{(1)}(1 - \dfrac{t}{||\mathbf{b}_n||}), \quad 0 \le t \le ||\mathbf{b}_n|| \quad \text{т.е. върху} \quad \mathbf{b}_n; \\ \\ 0 \quad \text{в противен случай} \end{cases}$$

Наричаме $\widehat{D}_s, s = 1, ..., n$, **гранични басисни мрежи**.

По-късно ще използваме $\widehat{D}_s$ за осигуряване на условието за гладкост в точките $V_i, i = 1, 2, ..., n$, т.е. (v) в дефиницията на класа $C(\mathbf{Data})$.

2.5 Леми.

Ако за звезда-триангулацията $T(\mathbf{c})$,отново разгледаме решенията на $(1), (2), (3)$ и (4), лесно се доказва:

Лема A

Ако $\{\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \lambda_3^{(s)}\}_{s=1}^{n-2}$ *е решение на* (1), $\{\mu_1^{(s)}, \mu_2^{(s)}, \mu_3^{(s)}\}_{s=1}^{n}$ *е решение на* (2),(3) *и* (4), *то:*

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & \lambda_1^{(s)} > 0, \lambda_3^{(s)} > 0 \\ (b) & \textit{ако} \prec (\mathbf{c}_s, \mathbf{c}_{s+2}) < \pi, \quad \textit{то} \quad \lambda_2^{(s)} < 0; \\ (c) & \textit{ако} \prec (\mathbf{c}_s, \mathbf{c}_{s+2}) > \pi, \quad \textit{то} \quad \lambda_2^{(s)} > 0; \\ (d) & \textit{ако} \prec (\mathbf{c}_s, \mathbf{c}_{s+2}) = \pi, \quad \textit{то} \quad \lambda_2^{(s)} = 0 \text{ и } \lambda_1^{(s)} = \lambda_3^{(s)} = 1/2. \end{array} \right\} s = 1, ..., n-2;$$

$$(ii) \quad \left\{ \mu_1^{(s)} > 0, \mu_2^{(s)} < 0, \mu_3^{(s)} > 0 \right\} s = 1, ..., n.$$

Нека

$$\widehat{F} = \widehat{F}_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}_{(\mathbf{b})} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\}$$

$$\widehat{F}^* = \widehat{F}^*_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}^*_{(\mathbf{b})} = \{\{f^*_s(t)\}_{s=1}^n, \{g^*_s(t)\}_{s=1}^n\}$$

са две мрежи от криви върху звезда-триангулацията $T(\mathbf{c})$, такива че:

$$f_s(t), f^*_s(t) \in L_2[0, ||\mathbf{c}_s||], s = 1, 2, ..., n;$$

$$g_s(t), g^*_s(t) \in L_2[0, ||\mathbf{b}_s||], s = 1, 2, ..., n.$$

Дефинираме скаларно произведение :

$$< \widehat{F}, \widehat{F}^* > := \sum_{i=1}^n \int_0^{||\mathbf{c}_i||} f_i(t) f^*_i(t)\, dt + \sum_{i=1}^n \int_0^{||\mathbf{b}_i||} g_i(t) g^*_i(t)\, dt.$$

По-долу ще използваме и следното означение за $< \widehat{F}, \widehat{F}^* >$:

$$< \widehat{F}, \widehat{F}^* > = \int_{(T)} \widehat{F} \widehat{F}^*.$$

Ако

$$\widehat{F} = \widehat{F}_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}_{(\mathbf{b})} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\}$$

е мрежа от криви, ще използваме и следните означения:

$$\int_{(\mathbf{c})} \widehat{F} := \sum_{i=1}^n \int_0^{||\mathbf{c}_i||} f_i(t)\, dt \quad \text{и} \quad \oint_{(\mathbf{b})} \widehat{F} := \sum_{i=1}^n \int_0^{||\mathbf{b}_i||} g_i(t)\, dt.$$

Ако

$$\widehat{F} = \widehat{F}_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}_{(\mathbf{b})} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\}$$

е от класа $W[T]$ то с $\widehat{F}''$ бележим :

$$\widehat{F}'' := \{\{f''_s(t)\}_{s=1}^n, \{g''_s(t)\}_{s=1}^n\}$$

Лема B (Peano - лема)
Нека $\widehat{F} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\} \in W[T]$.
$\widehat{F}$ *е от класа* $C(\mathbf{Data})$ *тогава и само тогава, когато:*

$$< \widehat{F}'', \widehat{B}_s > = w_s \quad , s = 1, ..., n-2; \quad < \widehat{F}'', \widehat{D}_s > = d_s \quad , s = 1, ..., n, \tag{5}$$

където $\widehat{B}_s$ *са централно ориентираните базисни мрежи,* $\widehat{D}_s$ *са граничните базисни мрежи, а числата* w_s, d_s *са:*

$$w_s := \frac{\lambda_1^{(s)}}{||\mathbf{c}_s||}(z_s - z_0) + \frac{\lambda_2^{(s)}}{||\mathbf{c}_{s+1}||}(z_{s+1} - z_0) + \frac{\lambda_3^{(s)}}{||\mathbf{c}_{s+2}||}(z_{s+2} - z_0) \quad ; s = 1, ..., n-2. \tag{6}$$

$$d_s := \frac{\mu_1^{(s)}}{||\mathbf{b}_s||}(z_{s+1} - z_s) + \frac{\mu_2^{(s)}}{||\mathbf{c}_s||}(z_0 - z_s) + \frac{\mu_3^{(s)}}{||\mathbf{b}_{s-1}||}(z_{s-1} - z_s) \quad ; s = 2, ..., n-1. \tag{7}$$

$$d_1 := \frac{\mu_1^{(1)}}{||\mathbf{b}_1||}(z_2 - z_1) + \frac{\mu_2^{(1)}}{||\mathbf{c}_1||}(z_0 - z_1) + \frac{\mu_3^{(1)}}{||\mathbf{b}_n||}(z_n - z_1) \quad . \tag{8}$$

$$d_n := \frac{\mu_1^{(n)}}{||\mathbf{b}_n||}(z_1 - z_n) + \frac{\mu_2^{(n)}}{||\mathbf{c}_n||}(z_0 - z_n) + \frac{\mu_3^{(n)}}{||\mathbf{b}_{n-1}||}(z_{n-1} - z_n) \quad . \tag{9}$$

Лема C

Централно ориентираните и гранични базисни мрежи от криви $\{\widehat{B}_s\}_{s=1}^{n-2}, \{\widehat{D}_s\}_{s=1}^{n}$ *образуват система от* $2n-2$ *на брой линейно независими мрежи.*

Лема D

Данните $\mathbf{Data} = \{T(\mathbf{c}); \{V_j(x_j, y_j), z_j\}_{j=0}^{n}\}$ *са* ***СИЛД*** *тогава и само тогава, когато числата дефинирани в* $(6), (7), (8), (9)$ *са строго положителни.*

Доказателството на горните четири леми е същото както в [3] . Тук ние сме променили само означенията. Причината да променим означенията е да представим свойствата на една мрежа от криви $\widehat{F} = \widehat{F}_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}_{(\mathbf{b})} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^{n}, \{g_s(t)\}_{s=1}^{n}\}$ като свойства върху централно насочените ребра и свойства върху граничните ребра.

Да припомним, че всяка мрежа от криви е дефинирана върху множеството $T = \mathbf{c} + \mathbf{b} \subset T(\mathbf{c})$. Тогава нека направим следните означения при произволна мрежа от криви $\widehat{F} = \widehat{F}_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}_{(\mathbf{b})} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^{n}, \{g_s(t)\}_{s=1}^{n}\}$:

$$\widehat{F}_{(\mathbf{c})} := \widehat{F}_{(\mathbf{c})}(V) := \begin{cases} \widehat{F}(V) \quad \text{при} \quad V \in \mathbf{c}; \\ \\ 0 \quad \text{при} \quad V \in \mathbf{b}; \end{cases}$$

$$\widehat{F}_{(\mathbf{b})} := \widehat{F}_{(\mathbf{b})}(V) := \begin{cases} \widehat{F}(V) \quad \text{при} \quad V \in \mathbf{b}; \\ \\ 0 \quad \text{при} \quad V \in \mathbf{c}. \end{cases}$$

За всяка едномерна функция $\varphi : \Omega \Rightarrow \mathbf{R} \;\; ; \;\; \Omega \subseteq \mathbf{R}$ нека да използваме означението:

$$[\varphi]_+ := [\varphi(t)]_+ := \begin{cases} \varphi(t) \;\; \text{ако} \;\; \varphi(t) > 0, t \in \Omega; \\ 0 \;\; \text{ако} \;\; \varphi(t) \le 0, t \in \Omega. \end{cases}$$

Ако $\alpha \in \mathbf{R}$, то $[\varphi]_+^{\alpha} := \Big([\varphi]_+\Big)^{\alpha}$.

Лема 1 *За произволни реални числа* $\{\alpha_s\}_{s=1}^{n-2}; \{\beta_j\}_{j=1}^{n}$ *и за всяко число* $q > 1$ *имаме:*

$$(a) \quad \int_{(\mathbf{c})} \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right]_+ \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right] = \int_{(\mathbf{c})} \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right]_+^2$$

$$(b) \quad \oint_{(b)} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}}\right]_+^{q-1} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}}\right] = \oint_{(b)} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}}\right]_+^{q} .$$

Доказателство: Доказателството на (a) и (b) е съвсем просто - трябва само да се проследят досега направените означения, дефиниции и да приложим следното очевидно **твърдение** (при $q = 2$ за (a)):

Твърдение. Ако f е едномерна функция, то за всяко $q > 1$:

$$f\ [f]_+^{q-1} = [f]_+^q\ .$$

∎

3 Екстремални проблеми върху ребрата в класа от мрежи $C(\mathbf{Data})$.

Забележка 1 *Всички резултати, които са цитирани по-долу в този параграф, са получени в общия случай на данни върху върховете на триъгълниците от произволна триангулация в* $\mathbf{R}^2$*. Тук ние сме изложили тези резултати за локални данни върху звезда-триангулация в смисъла на въведените и получени до тук означения, дефиниции, леми.*

Нека са дадени локалните данни $\mathbf{Data}:= \{T(\mathbf{c}); \{V_i, z_i\}_{i=0}^n\}$ в смисъла на Дефиниция 3. В серия работи на G.M.Nielson, като например [1] и [2], е разгледан следния екстремален проблем:

$$(\mathbf{P})_2 \qquad \textbf{Търсим} \qquad \widehat{F} \in C(\mathbf{Data}), \quad \textbf{минимизираща функционала}$$

$$\int_{(\mathbf{c})} (\widehat{F}'')^2 + \oint_{(\mathbf{b})} (\widehat{F}'')^2.$$

В своите резултати G.M.Nielson напълно характеризира единственото решение на този екстремален проблем, чрез теорема, за която ще стане дума по-долу.

Нека означим с

$$C^+(\mathbf{Data}) := \{\widehat{F}\}\ \text{ такива, че }\ \widehat{F} \in C(\mathbf{Data})\ \text{ и }\ \widehat{F}''(V) \geq 0\ \ ,\ \ V \in T.$$

В [3] е поставен аналогичен на горния екстремален проблем, с допълнителното ограничение за изпъкналост на мрежата от криви върху ребрата на триъгълниците от триангулацията:

$$(\mathbf{P})_2^+ \qquad \textbf{Търсим} \qquad \widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data}), \quad \textbf{минимизираща функционала}$$

$$\int_{(\mathbf{c})} (\widehat{F}'')^2 + \oint_{(\mathbf{b})} (\widehat{F}'')^2.$$

В [3] е предложен един общ подход при решаването на горните два екстремални проблема. Този подход съвсем не е оригинален, тъй като е използван отдавна за едномерни, линейни екстремални задачи, чието решение е естествена кубична сплайн функция и е удобен, когато решаваме аналогичната екстремална задача при допълнителното изискване за запазване на формата - изискване, което превръща задачата в нелинейна. Най-общо и грубо казано този подход се състои в следните последователни стъпки:

1) Определя се базисна система от линейно независими обекти, такива че е валидна **(Peano - лема)** от тип Лема B в параграф 2.5, с което се характеризира класа от обекти, в които търсим минимум (с или без ограничения) на някакъв функционал, или полунорма.

2) Като се използва доказаната **(Peano - лема)** и неравенството на Коши-Шварц (в $\mathbf{L}_2$ задачи), неравенството на Хьолдер (в $\mathbf{L}_p$ задачи) се доказва Теорема от прав тип, а именно - ако обект от класа, в който минимизираме, е от определен вид (който зависи от базисната система), то той решава екстремалния проблем.

3) Доказва се Теорема от обратен тип, а именно - съществува (единствен) обект от класа, в който минимизираме, от определения в Теоремата от прав тип вид.

Използвайки този подход е работено в [4], [5], [6], [7] и др.

Характерно за екстремалните задачи без ограничения е, че те водят до решаването на система линейни уравнения (за това понякога ги наричаме линейни задачи), за разлика от екстремалните задачи с ограничения, които водят до решаването на нелинейна система уравнения.

Когато е решена $\mathbf{L}_p$ екстремална задача с или без ограничения, обикновено може да решим и съответната $\mathbf{L}_\infty$ задача чрез граничен преход при $p \to \infty$.

В [3] е предоказана следната теорема на G.M.Nielson за проблема без ограничения $(P)_2$, като е използван подхода описан от 1), 2), 3) по-горе:

Теорема A. (G.M.Nielson)

Нека са дадени локалните данни $\mathbf{Data} := \{T(\mathbf{c}), \{V_i, z_i\}_{i=0}^n\}$. *Тогава проблемът* $(P)_2$ *има единствено решение* $\widehat{S} \in C(\mathbf{Data})$, *където* $\widehat{S}''$ *е във вида:*

$$\widehat{S}'' = \sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_j.$$

При това кофициентите $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-2}; \{\beta_r\}_{r=1}^{n}$ *се определят като единственото решение на линейната система уравнения:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_{(T)} \widehat{B}_k \left(\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_j \right) = w_k, & k = 1, ..., n-2; \\ \displaystyle\int_{(T)} \widehat{D}_r \left(\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_j \right) = d_r, & r = 1, ..., n, \end{array} \right\}$$

където числата w_k, d_r *са определени в* $(6), (7), (8), (9)$.

В [3] е доказана и следната характеризационна теорема за проблема с ограничения $(P)_2^+$, като е използван подхода описан от 1), 2), 3) по-горе:

Теорема B. ([3])

Да предположим, че локалните данни $\mathbf{Data} := \{T(\mathbf{c}), \{V_i, z_i\}_{i=0}^n\}$ *са* ***СИЛД***. *Тогава проблемът* $(P)_2^+$ *има единствено решение* $\widehat{S} \in C^+(\mathbf{Data})$, *където* $\widehat{S}''$ *е във вида:*

$$\widehat{S}'' = \left(\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_j \right)_+ .$$

При това кофициентите $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-2}; \{\beta_r\}_{r=1}^{n}$ се определят като единственото решение на нелинейната система уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_{(T)} \widehat{B}_k \left(\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_j \right)_+ = w_k, & k = 1, ..., n-2; \\ \displaystyle\int_{(T)} \widehat{D}_r \left(\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_j \right)_+ = d_r, & r = 1, ..., n. \end{array} \right\}$$

4 Числено намиране на изпъкналото върху ребрата екстремално решение в класа от мрежи $C^+(\mathbf{Data})$ за СИЛД.

Като използваме условието, че локалните данни $\mathbf{Data} := \{T(\mathbf{c}), \{V_i, z_i\}_{i=0}^{n}\}$ са **СИЛД**, ще скицираме доказателството на следното важно уточнение на Теорема B:

Теорема B1. *При условията и означенията на Теорема B, имаме:*

$$\alpha_k > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, ..., n-2; \qquad \beta_r > 0 \quad \text{при} \quad r = 1, 2, ..., n.$$

Доказателство (скицирано): Ще докажем теоремата, като използваме числен метод (на Якоби) за решаването на системата от нелинейни уравнения в Теорема B. Този числен метод се състои в следните итерации:

Ако знаем вектора $\gamma^{(m)} = (\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, ..., \alpha_{n-2}^{(m)}, \beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, ..., \beta_n^{(m)}) \in \mathbf{R}^{2n-2}$, то векторът $\gamma^{(m+1)} = (\alpha_1^{(m+1)}, \alpha_2^{(m+1)}, ..., \alpha_{n-2}^{(m+1)}, \beta_1^{(m+1)}, \beta_2^{(m+1)}, ..., \beta_n^{(m+1)}) \in \mathbf{R}^{2n-2}$ намираме като решим следната система нелинейни уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_{(T)} \widehat{B}_k \left(\alpha_k^{(m+1)} \widehat{B}_k + \sum_{s=1; s\neq k}^{n-2} \alpha_s^{(m)} \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j^{(m)} \widehat{D}_j \right)_+ = w_k, & k = 1, ..., n-2; \\ \displaystyle\int_{(T)} \widehat{D}_r \left(\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s^{(m)} \widehat{B}_s + \beta_r^{(m+1)} \widehat{D}_r + \sum_{j=1; j\neq r}^{n} \beta_j^{(m)} \widehat{D}_j \right)_+ = d_r, & r = 1, ..., n. \end{array} \right\} m = 0, 1, 2, ...$$

За начално приближение използваме вектора $\gamma^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, ..., \alpha_{n-2}^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, ..., \beta_n^{(0)}) := (0, 0, ..., 0, 0, 0, ..., 0) \in \mathbf{R}^{2n-2}$.

Нека приемем следната терминология:

Казваме, че векторът $\mathbf{R}^s \ni \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s)$ е **по-малък** от вектора $\mathbf{R}^s \ni \overline{\gamma} = (\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, ..., \overline{\gamma}_s)$ ако $\gamma_i < \overline{\gamma}_i$ при $i = 1, 2, ..., s$ и отбелязваме това със символа $\gamma << \overline{\gamma}$.

За итерационния процес дефиниран по-горе може да се докажат следните твърдения:

(i) Итерационният процес е коректно дефиниран, т.е. както и да подберем вектора $\gamma^{(m)} = (\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, ..., \alpha_{n-2}^{(m)}, \beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, ..., \beta_n^{(m)}) \in \mathbf{R}^{2n-2}$, винаги може (по единствен начин) да намерим $\gamma^{(m+1)} = (\alpha_1^{(m+1)}, \alpha_2^{(m+1)}, ..., \alpha_{n-2}^{(m+1)}, \beta_1^{(m+1)}, \beta_2^{(m+1)}, ..., \beta_n^{(m+1)}) \in \mathbf{R}^{2n-2}$ - такъв, че горната система уравнения е удовлетворена.

(ii) Ако $\gamma^{(m)} << \gamma^{(m+1)}$, то $\gamma^{(m+1)} << \gamma^{(m+2)}$.

(iii) $\gamma^{(0)} << \gamma^{(1)}$.

(iv) Същесвува положителна константа M, зависеща само от данните $\mathbf{Data} = \{T(\mathbf{c}); \{V_j(x_j, y_j), z_j\}_{j=0}^n\}$ такава, че за всеки цели $m \quad (0 \leq m); k \quad (1 \leq k \leq n-2); r \quad (1 \leq r \leq n)$, имаме $\alpha_k^{(m)} \leq M, \beta_r^{(m)} \leq M$, т.е. векторната редица $\{\gamma^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ е ограничена отгоре.

Щом са изпълнени горните условия, то $\gamma^{(m)}$ е строго монотонно растяща и ограничена векторна редица и тъй като $\gamma^{(0)} = (0, ..., 0)$, то теоремата е валидна. Нека изрично отбележим, че за доказателството на (ii) е необходимо да се използва Лема А - (ii), а това условие е изпълнено само когато множеството $\mathbf{b}$ е **строго изпъкнал** затворен полигон, т.е. при **СИЛД**.

∎

5 Изпъкнали екстремални проблеми от смесен тип в класа от мрежи $C^+(\mathbf{Data})$.

5.1 Проблемът $(P)_{2,p} \quad ; \quad 1 < p < \infty$.

Навсякъде по-долу ще предполагаме, че $\mathbf{Data} := \{T(\mathbf{c}); \{V_i, z_i\}_{i=0}^n\}$ са **СИЛД** в смисъла на Дефиниция 4.

За всяко $p\,; 1 < p < \infty\,; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $\widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data})$ да дефинираме функционала:

$$L_{2,p}(\widehat{F}) := \left(\int_{(\mathbf{c})} (\widehat{F}'')^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \max\{1, \theta_p\} \left(\oint_{(\mathbf{b})} (\widehat{F}'')^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

където $\theta_p = \theta_p(\widehat{F})$ е такова, че:

$$\left(\oint_{(\mathbf{b})} (\widehat{F}'')^q \right)^{\frac{1}{q}} = \theta_p \left(\oint_{(\mathbf{b})} (\widehat{F}'')^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лема 2 *Ако $\widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data})$, то функционалите $L_{2,p}(\widehat{F})$, $L_{2,q}(\widehat{F})$ са коректно дефинирани, тъй като $\theta_p > 0$ и $\theta_q > 0$.*

Доказателство:
Тъй като $\widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data})$, то

$$\left(\oint_{(\mathbf{b})} (\widehat{F}'')^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq 0 \quad \text{и} \quad \left(\oint_{(\mathbf{b})} (\widehat{F}'')^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

Ако допуснем, че кой да е от горните два интеграла е равен на 0, то следва, че $\widehat{F}''(V) = 0, V \in \mathbf{b}$, а това е противоречие с изискването данните да са **СИЛД** и $\widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data})$. Следователно неравенствата написани по-горе са строги. От това следва, че в дефиницията на $L_{2,p}(\widehat{F})$ числото $\theta_p > 0$ и в дефиницията на $L_{2,q}(\widehat{F})$ числото $\theta_q > 0$.

■

Да дефинираме обичайната $\mathbf{L}_p$ норма в пространството от мрежи от криви върху звезда-триангулация:

Нека $1 \le p < \infty$ и

$$\widehat{F} = \widehat{F}_{(\mathbf{c})} \bigcup \widehat{F}_{(\mathbf{b})} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\}$$

е мрежа от криви върху T, за която :

$$(i) \quad f_s(t) \quad \text{съществува п.н. и е ограничена в} \quad [0, ||\mathbf{c}_s||], s = 1, 2, ..., n;$$

$$(ii) \quad g_s(t) \quad \text{съществува п.н. и е ограничена в} \quad [0, ||\mathbf{b}_s||], s = 1, 2, ..., n.$$

Дефинираме:

$$||\widehat{F}||_p := \left(\int_{(\mathbf{c})} \sum_{s=1}^{n} |f_s|^p + \oint_{(\mathbf{b})} \sum_{s=1}^{n} |g_s|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

След тези означения може да дефинираме функционала $L_{2,p}(\widehat{F})$ като:

$$L_{2,p}(\widehat{F}) := ||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\{1, \theta_p\} ||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_p,$$

където $\theta_p = \theta_p(\widehat{F})$ е такова, че:

$$||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_q = \theta_p ||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_p,$$

или

$$L_{2,p}(\widehat{F}) := ||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\{||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_p, ||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_q\}.$$

Числото θ_p ще наречем p - фактор или просто фактор. Двойката p и q - фактори ще наречем спрегната.

Лема 3 *Нека $\widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data})$. Тогава, ако за спрегнатата двойка (θ_p, θ_q) е изпълнено $\theta_q < 1$, то $\theta_p > 1$.*

Доказателство:

От горните дефиниции и Лема 2, получаваме:

$$0 < \theta_p \theta_q = 1.$$

т.е. $\theta_p > 1$, тъй като $\theta_q < 1$.

■

Твърдение (аналогично на неравенството на Хьолдер).

Нека $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *и нека* $\widehat{F}, \widehat{G} \in C^+(\mathbf{Data})$. *Тогава:*

$$L_{2,p}(\widehat{F}) \;\; L_{2,q}(\widehat{G}) \geq < \widehat{F}'', \widehat{G}'' > . \tag{10}$$

Доказателство:

Нека $L_{2,p}(\widehat{F}) = ||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\{1, \theta_1\}||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_p$, където θ_1 е такова, че $||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_q = \theta_1||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_p$, т.е. $\theta_1 \geq 1$.

$L_{2,q}(\widehat{G}) = ||\widehat{G}''_{(\mathbf{b})}||_2 + \max\{1, \theta_2\}||\widehat{G}''_{(\mathbf{b})}||_q$, където θ_2 е такова, че $||\widehat{G}''_{(\mathbf{b})}||_p = \theta_2||\widehat{G}''_{(\mathbf{b})}||_q$, т.е. $\theta_2 \geq 1$.
Тогава:

$$L_{2,p}(\widehat{F}) \;\; L_{2,q}(\widehat{G}) = \Big(||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\{1, \theta_1\}||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_p\Big) \;\; \Big(||\widehat{G}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\{1, \theta_2\}||\widehat{G}''_{(\mathbf{b})}||_q\Big)$$

$$\geq ||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2||\widehat{G}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\{1, \theta_1\}\max\{1, \theta_2\}||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_p||\widehat{G}''_{(\mathbf{b})}||_q$$

$$\geq ||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2||\widehat{G}''_{(\mathbf{c})}||_2 + ||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_p||\widehat{G}''_{(\mathbf{b})}||_q \geq < \widehat{F}''_{(\mathbf{c})}, \widehat{G}''_{(\mathbf{c})} > + < \widehat{F}''_{(\mathbf{b})}, \widehat{G}''_{(\mathbf{b})} > = < \widehat{F}'', \widehat{G}'' >,$$

където за получаването на последното неравенство използваме неравеството на Коши-Шварц (т.е. Хьолдер при $p = 2$) и неравеството на Хьолдер.

■

Да разгледаме следния проблем:

$(\mathbf{P})_{\mathbf{2,p}}$ Търсим $\widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data})$ минимизираща функционала $L_{2,p}(\widehat{F})$.

Забележка 2 *Екстремалният проблем с ограничения* $(P)_{2,p}$ *наричаме от смесен тип, тъй като минимизираме в* $\mathbf{L}_2$ *смисъл по централно насочените ребра на звезда-триангулацията и в* $\mathbf{L}_p$ *смисъл по граничните ребра. Това се прави, за да може да се характеризира решението на* $(P)_{2,\infty}$ *(направено в параграф 5.2), което решение притежава важни свойства.*

Един от основните резултати на тази работа е следната теорема:

Теорема 1 *Нека* $\mathbf{Data}{:=} \{T(\mathbf{c}); \{V_i, z_i\}_{i=0}^n\}$ *са* ***СИЛД*** *в смисъла на Дефиниция* 4. *Ако съществува* $\widehat{S} = \widehat{S}_q \in C(\mathbf{Data})$ *такава, че*

$$\widehat{S}'' = \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(c)}}\right]_+ + \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(b)}}\right]_+^{q-1}; \tag{11}$$

където $\{\alpha_s\}_{s=1}^{n-2}; \{\beta_j\}_{j=1}^n$ *са реални числа,* $1 < p < \infty; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *то* $\widehat{S}$ *решава* $(P)_{2,p}$.

Доказателство:

Очевидно от условията на теоремата $\widehat{S} \in C(\mathbf{Data})$ и (11) следва $\widehat{S} \in C^+(\mathbf{Data})$. Нека $\widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data})$ е произволна мрежа от криви.

Тогава получаваме следната поредица от релации, като в дясната част на всеки ред по-долу, сме обяснили основанието за съответната релация:

$$
\begin{aligned}
& L_{2,p}(\widehat{F})\ \ L_{2,q}(\widehat{S}) \geq < \widehat{F}'', \widehat{S}'' >= \int_{(T)} \widehat{F}'' \left(\widehat{S}''_{(\mathbf{c})} + \widehat{S}''_{(\mathbf{b})}\right) && (10) - \text{неравенството на Хьолдер} \\
& = \int_{(\mathbf{c})} \widehat{F}'' \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right]_+ + \oint_{(\mathbf{b})} \widehat{F}'' \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}}\right]_+ && (11) \\
& \geq \int_{(\mathbf{c})} \widehat{F}'' \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right] + \oint_{(\mathbf{b})} \widehat{F}'' \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}}\right] && \widehat{F}''(V) \geq 0 \quad \text{при} \ \ V \in T \\
& = \sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \int_{(\mathbf{c})} \widehat{B}_s \widehat{F}'' + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_{(\mathbf{c})} \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}} \widehat{F}'' + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \oint_{(\mathbf{b})} \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}} \widehat{F}'' && \text{линейно преобразование} \\
& = \sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \int_{(T)} \widehat{B}_s \widehat{F}'' + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_{(T)} \widehat{D}_j \widehat{F}'' && \text{носител на} \ \ \widehat{B_s};\ \widehat{D}_j = \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}} + \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}} \\
& = \sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s w_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j d_j && \widehat{F} \in C(\mathbf{Data}), (5) \ \ \text{Лема B} \Rightarrow \\
& = \sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \int_{(T)} \widehat{B}_s \widehat{S}'' + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_{(T)} \widehat{D}_j \widehat{S}'' && \widehat{S} \in C(\mathbf{Data}), (5) \ \ \text{Лема B} \Leftarrow \\
& = \sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \int_{(T)} \widehat{B}_s \widehat{S}'' + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_{(T)} \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}} \widehat{S}'' + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_{(T)} \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}} \widehat{S}'' && \widehat{D}_j = \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}} + \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}} \\
& = \sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \int_{(\mathbf{c})} \widehat{B}_s \widehat{S}''_{(\mathbf{c})} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_{(\mathbf{c})} \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}} \widehat{S}''_{(\mathbf{c})} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \oint_{(\mathbf{b})} \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}} \widehat{S}''_{(\mathbf{b})} && \text{носител на} \ \ \widehat{B}_s, \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}, \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}} \\
& = \sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \int_{(\mathbf{c})} \widehat{B}_s \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right]_+ && \text{вида на} \ \ \widehat{S}''_{(\mathbf{c})} \ \ - \ \ (11) \\
& \quad + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \int_{(\mathbf{c})} \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}} \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right]_+ && \text{вида на} \ \ \widehat{S}''_{(\mathbf{c})} \ \ - \ \ (11) \\
& \quad + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \oint_{(\mathbf{b})} \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}}\right]_+^{q-1} && \text{вида на} \ \ \widehat{S}''_{(\mathbf{b})} \ \ - \ \ (11) \\
& = \int_{(\mathbf{c})} \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right]_+ \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right] && \text{линейно преобразование} \\
& \quad + \oint_{(\mathbf{b})} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}}\right]_+^{q-1} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}}\right], && \text{линейно преобразование} \\
& = \int_{(\mathbf{c})} \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s \widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{c})}}\right]_+^2 + \oint_{(\mathbf{b})} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(\mathbf{b})}}\right]_+^q && \text{Лема 1} \\
& = ||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2^2 + ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q^q = ||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2^2 + ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q^{q-1} ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q \\
& = ||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2^2 + ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_p ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q. && \text{виж} \quad (*)
\end{aligned}
$$

Последното равенство е валидно, тъй като при $q > 1$

$$
(*) \quad ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q^{q-1} = \left[\oint_{(\mathbf{b})} \left(\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}\right)^q\right]^{1-\frac{1}{q}} = \left[\oint_{(\mathbf{b})} \left(\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}\right)^{q\frac{q-1}{q-1}}\right]^{\frac{1}{p}} = \left\{\oint_{(\mathbf{b})} \left[\left(\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}\right)^{q-1}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} = ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_p.
$$

От горното получаваме:

$$L_{2,p}(\widehat{F}) \ \ L_{2,q}(\widehat{S}) \geq ||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2^2 + ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_p||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q. \tag{12}$$

Нека допуснем, че за $L_{2,p}(\widehat{S})$, фактора $\theta_p > 1$. Тогава от Лема 3 фактора $\theta_q < 1$ и използвайки дефиницията на $L_{2,q}(\widehat{S})$ и $L_{2,p}(\widehat{S})$ получаваме:

$$L_{2,q}(\widehat{S}) \ \ L_{2,p}(\widehat{S}) = \left[||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\{1,\theta_q\}||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q\right] \ \ \left[||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\{1,\theta_p\}||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_p\right]$$

$$= \left[||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2 + ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q\right] \ \ \left[||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \frac{||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q}{||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_p}||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_p\right] = ||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2^2 + ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_p||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q.$$

По същия начин, ако допуснем , че за $L_{2,p}(\widehat{S})$, фактора $\theta_p < 1$, то:

$$L_{2,q}(\widehat{S}) \ \ L_{2,p}(\widehat{S}) = ||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2^2 + ||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_p||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_q.$$

От тези равенства и (12) получаваме:

$$L_{2,p}(\widehat{F}) \geq \ \ L_{2,p}(\widehat{S}),$$

тъй като $L_{2,q}(\widehat{F}) > 0$.

∎

Лема 4 *(основна лема за получаване на обратни теореми)*
Ако

$$w_i > 0, i = 1, ..., n-2 \qquad ; \qquad d_i > 0, i = 1, ..., n$$

и $1 < q$, *то* $2n-2$ *мерната функция:*

$$\Phi_q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-2}, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) :=$$

$$\int_{(\mathbf{c})} \left[\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \widehat{B}_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(c)}}\right]_+^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2} w_i\alpha_i + \frac{1}{q}\oint_{(\mathbf{b})} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j \widehat{D}_{j_{(b)}}\right]_+^q - \sum_{j=1}^{n} d_j\beta_j$$

(i) *притежава локален минимум -* $\mathbf{R}^{2n-2} \ni \gamma_q := (\alpha_1(q), ..., \alpha_{n-2}(q), \beta_1(q), ..., \beta_n(q))$;
(ii) *при всеки* $1 < q_1 < q_2 \quad \gamma_{q_1} >> \gamma_{q_2}$;
(iii) *при всяко* $1 < q$ *векторите* γ_q *и* γ_2 *са линейно зависими;*
(iv) $\lim\limits_{q\to 1} \gamma_q$ *съществува. Нека го означим с* γ_1.
(v) $\gamma_1 >> (0, 0, ..., 0)$.

Доказателство:
За да докажем лемата, ще използваме следното
Твърдение. Ако $F : \mathbf{R}^m \Rightarrow \overline{\mathbf{R}} \subset \mathbf{R}$ е (строго) изпъкнала и диференцируема m-мерна функция и ако за всеки ненулев вектор $\mathbf{R}^m \ni \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ е изпълнено

$$\lim_{t\to\infty} F(t\alpha_1, t\alpha_2, ..., t\alpha_m) = \infty \ \text{ и } \ \lim_{t\to-\infty} F(t\alpha_1, t\alpha_2, ..., t\alpha_m) = \infty,$$

то F притежава (локален) минимум в $\mathbf{R}^m$.

Това твърдение често се използва при екстремални задачи в изпъкналия анализ. Конкретно за проблемите в тази работа сме използвали приложението на горното твърдение за подобни проблеми от [8]. Подобни идеи са използвани и в [5], [6] и [7].

Очевидно Φ_q е изпъкнала и диференцируема функция на аргументите си.

(**i**–)

Нека $\mathbf{R}^{2n-2} \ni \gamma := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-2}, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \neq (0, 0, ..., 0)$.

За γ имаме два възможни случая:

I случай. $\max\left\{\max\limits_{1\leq i\leq n-2} \alpha_i \ , \ \max\limits_{1\leq j\leq n} \beta_j\right\} > 0$ или

II случай. $\min\left\{\min\limits_{1\leq i\leq n-2} \alpha_i \ , \ \min\limits_{1\leq j\leq n} \beta_j\right\} < 0.$

Тогава, като използваме положителността на числата d_j, w_i и условието $q > 1$, виждаме, че:

$$\lim_{t\to\infty} \Phi_q(t\alpha_1, t\alpha_2, ..., t\alpha_{n-2}, t\beta_1, t\beta_2, ..., t\beta_n) = \infty,$$

$$\lim_{t\to-\infty} \Phi_q(t\alpha_1, t\alpha_2, ..., t\alpha_{n-2}, t\beta_1, t\beta_2, ..., t\beta_n) = \infty$$

и в двата случая.

Но тогава, според горното Твърдение, диференцируемата, изпъкнала функция Φ_q притежава минимум и той се постига там, където се анулират частните производни на Φ_q, т.е.

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{(\mathbf{c})} \widehat{B}_k \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s(q)\widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(q)\widehat{D}_{j_{(c)}}\right]_+ = w_k \\ k = 1, ..., n-2; \\ \displaystyle\int_{(\mathbf{c})} \widehat{D}_{r_{(c)}} \left[\sum_{s=1}^{n-2} \alpha_s(q)\widehat{B}_s + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(q)\widehat{D}_{j_{(c)}}\right]_+ + \oint_{(\mathbf{b})} \widehat{D}_{r_{(b)}} \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j(q)\widehat{D}_{j_{(b)}}\right]_+^{q-1} = d_r \\ r = 1, ..., n. \end{array}\right\} \quad (13)$$

С това доказахме, че Φ_q има минимум. Това, че този минимум е локален ще видим по-късно.

(**ii**) следва от вида на Φ_q. От (**ii**) следва, че минимума на Φ_q е единствен, т.е. условието (**i**) е валидно.

(**iii**) Ако разгледаме нелинейната система (13) при $q = 2 > 1$, виждаме, че тя е същата като нелинейната система в Теорема B от параграф 3.1.

С това, като използваме Лема C от параграф 2.5, доказваме (**iii**).

(**iv**) и (**v**) следват от (**iii**), (**ii**) и от Теорема B1 от параграф 4.

■

След Лема 4 може да докажем обратна на Теорема 1, както и граничния случай $p = \infty, q = 1$, а именно:

Теорема 2 *Нека* **Data**$:= \{T(\mathbf{c}); \{V_i, z_i\}_{i=0}^n\}$ *са* ***СИЛД*** *в смисъла на Дефиниция* 4.*Тогава*

(i) *за всяко $p > 1$ съществуват реални числа $\{\alpha_s(q) =: \alpha_s\}_{s=1}^{n-2}; \{\beta_j(q) =: \beta_j\}_{j=1}^{n}$ и мрежа от криви $\widehat{S}_q =: \widehat{S} \in C^+(\mathbf{Data})$ такива, че (11) е удовлетворено при $q = \dfrac{p}{p-1} > 1$;*

(ii) *Границите $\lim\limits_{q\to 1} \widehat{S}_q$, $\lim\limits_{q\to 1}\{\alpha_s(q)\}_{s=1}^{n-2}$, $\lim\limits_{q\to 1}\{\beta_j(q)\}_{j=1}^{n}$ съществуват. Нека ги означим съответно с $\widehat{S}_\infty$, $\{\alpha_s(\infty)\}_{s=1}^{n-2}$, $\{\beta_j(\infty)\}_{j=1}^{n}$;*

(iii) *Векторът $(\{\alpha_s(\infty)\}_{s=1}^{n-2}, \{\beta_j(\infty)\}_{j=1}^{n})$ е колинеарен с вектора $(\{\alpha_s(2)\}_{s=1}^{n-2}, \{\beta_j(2)\}_{j=1}^{n})$;*

(iv) $\{\alpha_s(\infty) > 0\}_{s=1}^{n-2}$, $\{\beta_j(\infty) > 0\}_{j=1}^{n}$.

5.2 Проблемът $(P)_{2,\infty}$.

Нека **Data**:= $\{T(\mathbf{c}); \{V_i, z_i\}_{i=0}^{n}\}$ са **СИЛД** в смисъла на Дефиниция 4. В този параграф ще се интересуваме от решението на следния екстремален проблем с ограничения:

(P)$_{2,\infty}$ **Търсим** $\widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data})$, **минимизираща функционала**

$$||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max_{V\in\mathbf{b}} \widehat{F}''(V)$$

Ако $\widehat{F}$ е ограничена мрежа от криви, нека приемем следниге означения:
$\chi(\widehat{F})$ е измерената дължина на носителя на $\widehat{F}$;
$||\widehat{F}||_\infty := \lim\limits_{p\to\infty} ||\widehat{F}||_p$.

Тогава по стандартен начин, получаваме:

$$||\widehat{F}||_\infty = \max_{V\in T} |\ \widehat{F}(V)\ |\ \ \chi(\widehat{F}). \tag{14}$$

Като използваме теоремата за средните стойности получаваме:

$$||\widehat{F}||_1 \le \max_{V\in T} |\ \widehat{F}(V)\ |. \tag{15}$$

Теорема 3 *Мрежата от криви $\widehat{S}_\infty$ в Теорема 2 от предишния параграф решава $(P)_{2,\infty}$.*

Доказателство:

Нека $\widehat{F} \in C^+(\mathbf{Data})$ е произволна. Тогава, като използваме (14) и (15), получаваме:

$$\lim_{p\to\infty} L_{2,p}(\widehat{F}) = \lim_{p\to\infty} \left[||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\left\{||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_p, ||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_q\right\}\right] = ||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\left\{||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_\infty, ||\widehat{F}''_{(\mathbf{b})}||_1\right\}$$

$$\le ||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max_{V\in\mathbf{b}} \widehat{F}''(V),$$

или

$$\lim_{p\to\infty} L_{2,p}(\widehat{F}) \le ||\widehat{F}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max_{V\in\mathbf{b}} \widehat{F}''(V) \tag{16}$$

От друга страна, от Теорема 1, за $\widehat{S} = \widehat{S}_q$ имаме

$$L_{2,p}(\widehat{F}) \geq \quad L_{2,p}(\widehat{S}).$$

Като използваме вида на $\widehat{S}''$ от (11), (14) и Теорема 2, от горното неравенство получаваме:

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} L_{2,p}(\widehat{F}) \geq \quad \lim_{p\to\infty} L_{2,p}(\widehat{S}) &= \lim_{p\to\infty}\left[||\widehat{S}''_{(\mathbf{c})}||_2 + \max\{1, \theta_p\}\,||\widehat{S}''_{(\mathbf{b})}||_p\right] \\ &\geq ||\widehat{S}''_{\infty_{(\mathbf{c})}}||_2 + ||\widehat{S}''_{\infty_{(\mathbf{b})}}||_\infty = ||\widehat{S}''_{\infty_{(\mathbf{c})}}||_2 + \max_{V\in\mathbf{b}} \widehat{S}''_\infty(V),\end{aligned}$$

или

$$\lim_{p\to\infty} L_{2,p}(\widehat{F}) \geq ||\widehat{S}''_{\infty_{(\mathbf{c})}}||_2 + \max_{V\in\mathbf{b}} \widehat{S}''_\infty(V). \tag{17}$$

Теоремата следва от (16) и (17).

■

5.3 Числен метод за намирането на $\widehat{S}_\infty$.

Съществува удобен числен метод за намирането на $\widehat{S}_\infty$. Без да бъдем изчерпателни, ще разгледаме основните идеи за реализацията му. Нека означим:

$$\widehat{S} = \widehat{S}_q = \{\{f_s^q(t)\}_{s=1}^n, \{g_s^q(t)\}_{s=1}^n\}, \quad \widehat{S}_\infty = \{\{f_s^\infty(t)\}_{s=1}^n, \{g_s^\infty(t)\}_{s=1}^n\}.$$

От Теорема 2 следват следните твърдения:

(**i**) $\lim_{q\to 1} \widehat{S}_q = \widehat{S}_\infty$;

(**ii**) мрежата от криви $\widehat{S}_\infty$ има обща допирателна равнина с мрежата от криви $\widehat{S}_2$ в точката V_0;

(**iii**) $\{(f_s^\infty)''(0) > 0\}_{s=1}^n$;

(**iv**) функциите $\{g_s^\infty(t)\}_{s=1}^n\}$ са квадратни алгебрични полиноми с един и същи коефициент - числото $\sigma > 0$ пред t^2.

Тези четири твърдения ни дават следния

Числен метод

1) Намираме мрежата от криви $\widehat{S}_2$. От (**ii**) следва, че тогава ще знаем числата $\{(f_s^\infty)'(0)\}_{s=1}^n$.

2) Като използваме (**iii**) и (**iv**), последователно може да определим числата $\{(f_s^\infty)''(0) > 0\}_{s=1}^n$ и числото $\sigma > 0$. Тук се използва Принципа на максимума.

Имайки предвид интерполационните условия и вида на $\widehat{S}_\infty$, тази информация е достатъчна за определянето на $\widehat{S}_\infty$.

6 Изпъкнало блендиране (продължение) на мрежи от криви.

Задачата за изпъкнало блендиране на една мрежа от криви
$\widehat{F} = \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\} \in C^+(\mathbf{Data})$;   **Data** са **СИЛД**, е следната:

Търсим двумерна, изпъкнала и диференцируема функция $F : T(\mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{R}$ такава, че

$$F(V) = \widehat{F}(V) \quad \text{при} \quad V \in T.$$

Както вече отбелязахме във въведението, съществуват множество мрежи в класа $C^+(\mathbf{Data})$, които не могат да бъдат изпъкнало блендирани. В общия случай такова е и решението на изпъкналия ектремален проблем $(P)_2^+$ от параграф 3.

Тук, ние ще блендираме решението на $(\mathrm{P})_{2,\infty}$ в двумерна, изпъкнала и диференцируема функция $F : T(\mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{R}$.

Отново нека отбележим, че когато работим с произволен триъгълник с върхове $V_1(x_1, y_1), V_2(x_2, y_2), V_3(x_3, y_3)$ е удобно за всяко $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ да въведем барицентричните координати B_1, B_2, B_3 дефинирани чрез решаването на уравненията:

$$\left.\begin{array}{l} B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 = x \\ B_1y_1 + B_2y_2 + B_3y_3 = y \\ B_1 + B_2 + B_3 = 1. \end{array}\right\}$$

Сега да опишем алгоритмично блендирането на решението на $(\mathrm{P})_{2,\infty}$ в двумерна, изпъкнала и диференцируема функция $F : T(\mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{R}$.

Нека решението на $(\mathrm{P})_{2,\infty}$ е мрежата от криви $\widehat{F} := \{\{f_s(t)\}_{s=1}^n, \{g_s(t)\}_{s=1}^n\}$.

От числения метод - 2) в предишния параграф следва, че при $j = 1, 2, ...n$:
$f_j(0) - ||\mathbf{c}_j||\ f'_j(||\mathbf{c}_j||) =: \sigma > 0$.

I Нека определим числото $\sigma > 0$ от кое да е от горните равенства.
Тогава извършваме следната процедура:

II За $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ и $j = 1, ..., n-1$ да намерим числото
$0 \le t := \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ и барицентричните координати на (x, y) - λ, u, ν, относно триъгълника $\triangleleft_j = ((x_0, y_0), (x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}))$. Дефинираме функциите

$$S_j(x, y) := \begin{cases} uf_{j+1}(t) + (1-u)f_j(t) + \sigma u(1-u) & \text{ако} \;\; u > 0 \;\; \text{и} \;\; \nu \ge 0, \lambda \ge 0; \\ 0 \quad \text{в противен случай.} \end{cases}$$

III За $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ да намерим числото
$0 \le t := \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ и барицентричните координати на (x, y) - λ, u, ν, относно триъгълника $\triangleleft_n = ((x_0, y_0), (x_n, y_n), (x_1, y_1))$. Дефинираме функцията

$$S_n(x, y) := \begin{cases} uf_1(t) + (1-u)f_n(t) + \sigma u(1-u) & \text{ако} \;\; u > 0 \;\; \text{и} \;\; \nu \ge 0, \lambda \ge 0; \\ 0 \quad \text{в противен случай.} \end{cases}$$

IV Конструираме $F : T(\mathbf{c}) \Rightarrow \mathbf{R}$ като $F(x, y) := \sum_{j=1}^{n} S_j(x, y) + \widehat{F}$.

Литература

[1] G.M.Nielson, A method for interpolating scattered data based upon a minimum norm network, Math.Comp. 40 (1983), 253-271.

[2] G.M.Nielson, Minimum norm interpolation in triangles, Siam J. Numer. Anal. Vol.17 N1 (1980), 44-62.

[3] L.E.Andersson , T.Elfving , G.Iliev , K.Vlachkova; Interpolation of convex scattered data in R^3 based upon an edge convex minimum norm network,J.Approx. Theory 80 (1995), 299-319.

[4] G.Iliev and W.Pollul, Convex interpolation by functions with minimal L_p norm $(1 < p < \infty)$ of the $k-$ derivative, in "Proceedings, 13 Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, April 1984."

[5] C.Miccelli,P.Smith,J.Swetits, and J.Ward, Constrained L_p approximation, Constr. Approx. 1 (1985), 93-102.

[6] C.Miccelli and F.Utreras, Smooting and interpolation in a convex subset of a Hilbert space, Siam J. Sci. Statist. Comput. 9 (1988), 728-746.

[7] C.K.Chui, F.Deutch and J.D.Ward; Constrained best approximation in Hilbert space, J.Approx. Theory 71 (1992), 213-238.

[8] P.Petrov - unpubliched manuscript.

Съдържание